北京理工大学2020-2021学年第二学期

**线性代数A期末试题答案**

**一、(14分)、** 解：（1）由题意可知









（2）由知



从而，而所以





所以 

二**(10分)、**解：将方程组和方程合并后得线性方程组：



其增广矩阵为



（1）当时，方程组无公共解；

（2）当时，阶梯形方程组为，基础解系为，所求公共解为，其中为任意常数。

（4）当时，阶梯形方程组为，可得公共解为

三**(10分)、**（1）证明：设存在一组常数，使得



则可得 。

将方程组的系数矩阵进行初等行变换：



可得方程组的解为，即线性无关，为的一个基。

（2）解：由



可得

所求过渡矩阵为

（2）因为***C***在基下的坐标分别为，设***C***在下的坐标为，由坐标变换公式，有，经计算可得



则***C***在下的坐标为

.

四**(10分)、**（1）证明：对于中的任意两个向量，均有



所以σ是的线性变换。

（2）解：由于



则有

因此***σ***在的自然基下的矩阵为 

**五(10分)、**解：（1）



所以，向量组的极大无关组为.

（2）由行简化阶梯形可得 

**六(10分)、解：**

**（1）*A***的初等因子为

（2）***A***的特征值为

（3）由题意可知***P***的第1、2、4列向量是***A***分别对应于的特征向量。

**七(15分)、**解：（1）二次型的矩阵为，标准形的矩阵为，两个矩阵相似，因此***A***的特征值为.

并且两个矩阵的迹相同，即，可得。

（2）二次型的矩阵为。当时，求的基础解系：



可得的特征向量为；

单位化得.

当时，求的基础解系：



可得的特征向量为；

将正交化：



单位化得：

可得正交矩阵



（3）二次型正惯性指数为1（或特征值不全大于0），所以二次型不正定。

**八（15分）、**解：（1）由，可得，则有



因为有非零解，所以，因此不是零矩阵，否则与已知矛盾，即，因此，由此可得.

（2）由（1）可知，，所以.

（3）由为的非零解，所以为的特征值，为的特征向量；再由，可知的列向量为的解，由，可知的前两列向量是的基础解系，则为的二重特征值，属于的

特征向量为，因此所求的相似变换矩阵为



（4）由，可得

由于，可得****

**九(6分)、**证明：因为为阶实对称矩阵，所以存在阶正交矩阵，使得. 任取中一个非零向量，设，则



同理

因此 

（2）由于，且，因此从（1）的结论可以得到

